**Всероссийская олимпиада школьников. Муниципальный этап 2024/25 уч.г.**

**Математика, 11 класс, решения**

**Время выполнения 235 мин. Максимальное кол-во баллов – 35**

**Все задания по 7 баллов**

**Критерии оценивания заданий**

|  |  |
| --- | --- |
| **Баллы** | **Правильность (ошибочность) решения** |
| 7 | Полное (верное) решение. |
| 6-7 | Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение. |
| 5-6 | Решение в целом верное. Однако не рассмотрены отдельные случаи, либо решение содержит ряд ошибок, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений. |
| 4 | Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка+пример» верно получена оценка. |
| 2-3 | Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка+пример» верно построен пример. |
| 1 | Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении). |
| 0 | Решение неверное, продвижения отсутствуют. |
| 0 | Решение отсутствует. |

***\*Указания к оцениванию задач содержатся также в комментариях к решениям***

11.1. Случайным образом выбрали число от до . Найдите вероятность того, что выбрано число, все цифры которого меньше .

**Ответ.** .

**Решение.** *Способ 1.* Cделаем все числа четырёхзначными, дополнив, если надо, нулями слева. Добавив , посчитаем число кодов от до . В каждом разряде, кроме первого слева, есть вариантов. Поэтому кодов вида и будет по , кодов вида , , – по . Значит, всего имеем кодов, а чисел будет на одно меньше. Искомая вероятность равна .

*Способ 2.* Интересующий нас ряд можно считать рядом чисел в пятеричной системе счисления. Тогда .

***Комментарий.*** *Любое полное решение задачи – 7 баллов. За каждую арифметическую ошибку снимается 2 балла. Приведён только ответ – 1 балл. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

11.2. Пусть – наибольший нечётный делитель натурального числа . Например, , , . Вычислите значение суммы

.

**Ответ.** .

**Решение.** Наибольшие нечётные делители никаких двух из данных чисел не могут совпасть, так как числа с одинаковыми наибольшими нечётными делителями либо равны, либо отличаются минимум в раза. Получается, что наибольшие нечётные делители чисел отличаются друг от друга. Получается, что наибольшие нечётные делители чисел от до – это различных нечётных чисел, которые не превышают . Следовательно, это числа . Если к набору чисел добавить число , то искомая сумма будет равна

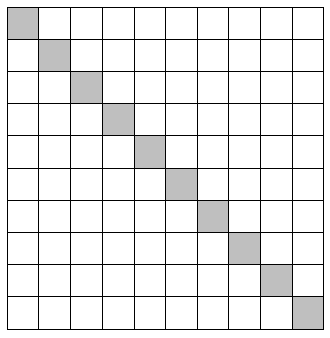
.

***Комментарий.*** *Любое верное решение – 7 баллов. Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности, включая арифметическую ошибку в вычислении последней суммы – до 5 баллов. Если решение не доведено до конца, за доказательство полезных вспомогательных утверждений – 2-3 балла. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

11.3. Назовём прямую, пересекающую параболу с вершиной в точке в двух точках и , особенной, если угол прямой. Докажите, что все особенные прямые проходят через одну точку.

**Решение.** Пусть – уравнение особой прямой, проходящей через точки , . Тогда, во-первых, и – корни квадратного уравнения и по теореме Виета их произведение равно . Во-вторых, из перпендикулярности векторов и следует равенство нулю их скалярного произведения, т.е. , откуда с учётом условия . Значит, . Это означает, что , т.е. все особые прямые проходят через точку .

***Комментарий.*** *Любое полное решение задачи – 7 баллов. Для приведенного решения следующие критерии суммируются. По теореме Виета записано произведение корней квадратного уравнения – 2 балла; получено условие – 3 балла; найдена искомая точка – 2 балла. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

11.4. В клетках квадрата расставлены числа от до так, что соседние числа стоят в соседних клетках. Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону. Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел, расположенных в серых клетках (см. рисунок) ?

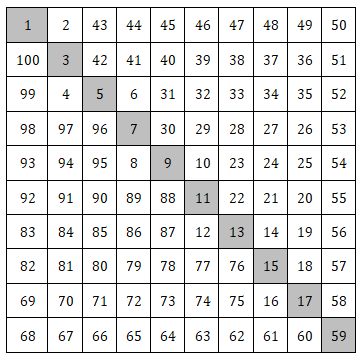
**Ответ.**.

**Решение.** *Оценка.* Раскрасим клетки таблицы в шахматном порядке. Если вписывать числа по порядку, то цвет и чётность будут синхронно чередоваться. Поэтому все чётные числа будут на одном цвете, все нечётные – на другом.

Рассмотрим числа , стоящие на главной диагонали (конечно, на диагонали они могут стоять не по порядку). Эти числа одинаковой чётности, значит, они отличаются как минимум на . Поэтому

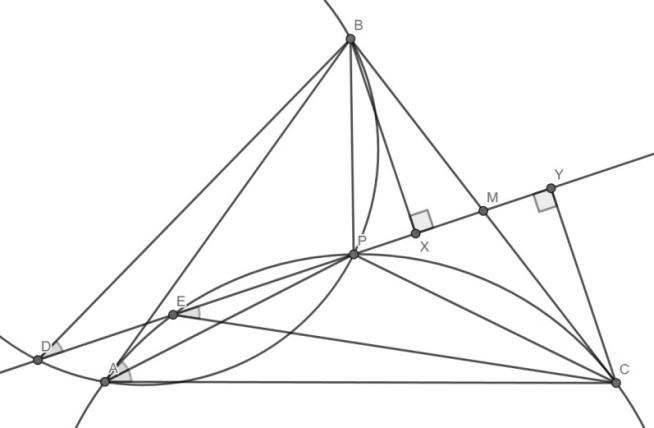
Докажем, что . Предположим, что мы вписывали числа в клетки доски в порядке их возрастания. Тогда в тот момент, когда мы вписывали на диагональ десятое число, покидаемая нами половина доски была заполнена (ибо мы в неё уже не вернёмся). Эта половина (включая диагональ) содержит клеток: белых и чёрных. Но при заполнении доски белые и чёрные клетки чередуются. Поэтому к этому моменту были заполнены ещё как минимум четыре чёрные клетки в другой половине доски, т.е. всего заполнено не меньше клеток. Имеем .

*Пример* для суммыизображен на рисунке.



***Комментарий.*** *Полное обоснованное решение – 7 баллов. Получена оценка – 4 балла, приведён пример – 3 балла, баллы суммируются. За рассмотрение неоптимальных примеров баллы не начисляются. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

11.5. Точка – середина стороны остроугольного треугольника , внутри которого отмечена точка так, что . Около треугольников и описали окружности и . Прямая *MP* пересекает окружность в точке , а – в точке , причем . (Точка лежит между точками и , а точка – между точками и .) Докажите, что .

**Решение.** *Способ 1.* Четырёхугольник – вписанный, поэтому . Аналогично четырёхугольник – вписанный, поэтому Опустим высоты и на прямую . Заметим, что прямоугольные треугольники и равны по гипотенузе и острому углу , откуда получаем . Заметим, что прямоугольные треугольники и равны по катету и острому углу , откуда получаем . Тогда *.* Получается, что *.* Следовательно, в треугольнике высота совпадает с медианой, поэтому он является равнобедренным, и , что и требовалось.

*Способ 2.* После равенства можно было закончить решение иначе. Можно доказать, что треугольники и равны, откуда и следует . По теореме синусов для треугольников и имеем

Поскольку , получаем . Тогда треугольники и равны по двум сторонам *,* и углу между ними .

***Комментарий.*** *Любое полное решение задачи – 7 баллов. Корректно доказано, что треугольники и равны, но дальнейших продвижений нет – 6 баллов. Допущена ошибка в доказательстве равенства треугольников и , либо доказано, что , но дальнейших продвижений нет – 3 балла. Доказано, что , либо , либо , но дальнейших продвижений нет – 2 балла.*