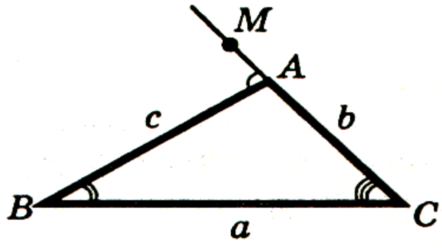
СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К экзаменам.

Тема 1

Неравенство треугольника



$\angle BAM = \angle B + \angle C$

На любом треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других сторон.

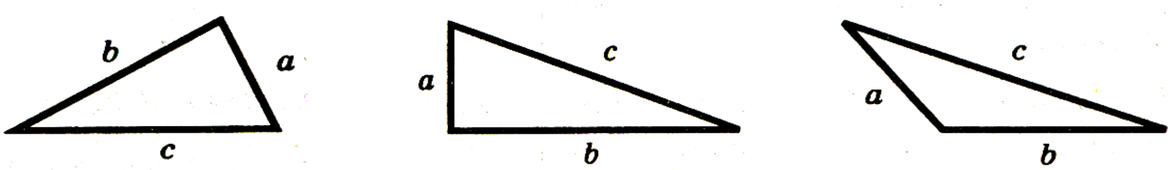
$a - b < c < a + b$,

где a,b,c – длина сторон треугольника, причем $a > b$.

Внешний угол треугольника, равен сумме двух внутренних, не смежных с ним углов.

В треугольнике против большей стороны лежит больший угол, против большего угла – большая сторона.

$a^2 + b^2 > c^2$ $\quad$ $a^2 + b^2 = c^2$ $\quad$ $a^2 + b^2 < c^2$

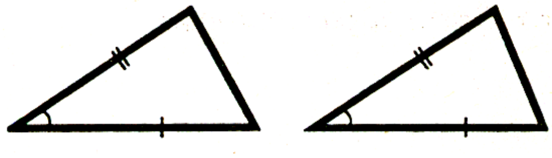


остроугольный прямоугольный тупоугольный

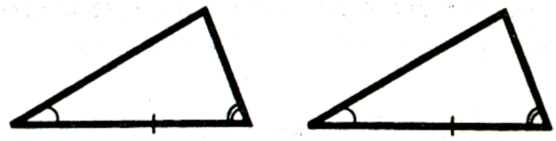
Тема 2 Признаки равенства треугольников

По двум сторонам и углу между ними

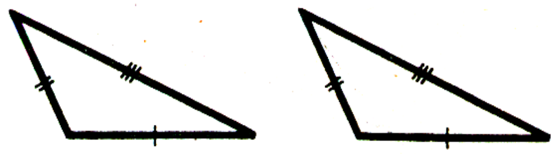
(*С У С*)



По двум сторонам и двум прилежащим к ней углам (*У С У*)



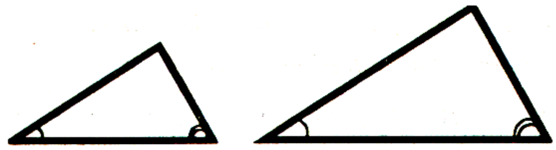
По трем сторонам (*С С С*)



Сходственные (соответствующие) *элементы* равных треугольников *равны*.

Признаки подобия треугольников

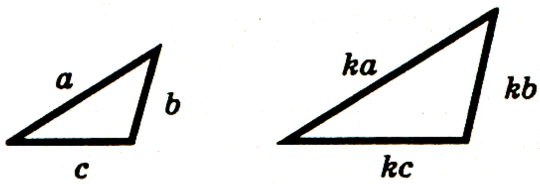
По двум углам (*У У*).



По двум сторонам и углу между ними

(*С У С*).

По трем сторонам (*С С С*).



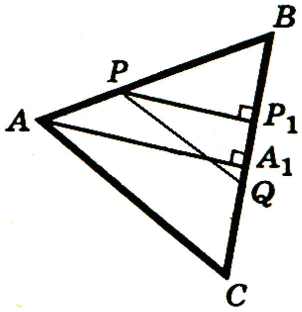
Тема 3

Прямая, параллельная стороне треугольника, отсекает от него треугольники, подобные данному.

Сходственные линейные элементы подобных треугольников *пропорциональны сходственным сторонам*.

Периметры подобных треугольников относятся как сходственные стороны.

Площади подобных треугольников относятся как квадраты сходственных сторон.



$PQ \parallel AC \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta PBQ \Rightarrow$

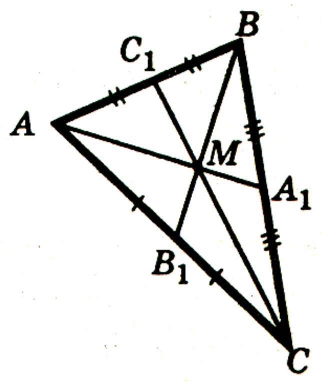
$\Rightarrow \dfrac{AB}{PB} = \dfrac{AC}{PQ} = \dfrac{BC}{BQ} = k$ — коэффициент подобия

$PP_1 \parallel AA_1 \Rightarrow \dfrac{AA_1}{PP_1} = k$

$\dfrac{AB + AC + BC}{PB + PQ + BQ} = k; \ \dfrac{S_{ABC}}{S_{PBQ}} = k^2$

Тема 4 Медиана

Медианой треугольника называется отрезок, который соединяет вершину треугольника с серединой противолежащей стороны.



$$AM : MA_1 = BM : MB_1 = CM : MC_1 = 2 : 1$$

$$AA_1^2 = m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$

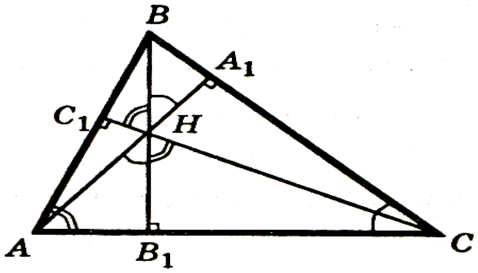
Медианы треугольника пересекаются в одной точке (*центре тяжести* треугольника) и делятся этой точкой в отношении 2:1, считая от вершины.

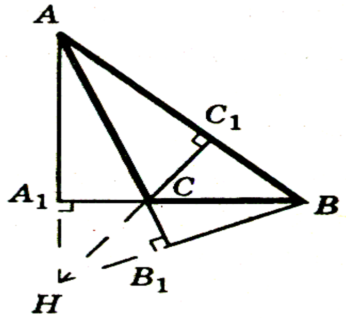
Медиана делит треугольник на два *равновеликих* треугольника. Три медианы делят треугольник на шесть *равновеликих* треугольников.

Тема 5 Высота

Высотой треугольника называется отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины треугольника на прямую, содержащую противолежащую сторону.

Все высоты треугольника пересекаются в одной точке – *ортоцентре* треугольника.





AA_1, BB_1, CC_1 — высоты ΔABC

$AA_1 = h_a$; $BB_1 = h_b$; $CC_1 = h_c$

H — ортоцентр

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$$

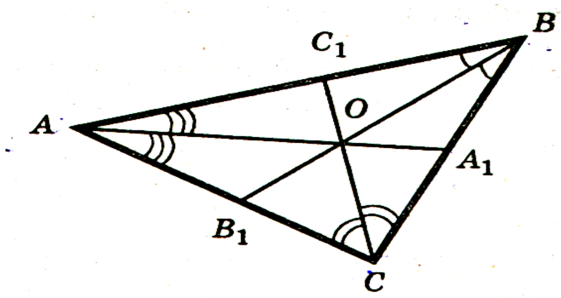
r — радиус вписанной окружности

Тема 6 Биссектриса

Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы внутреннего угла треугольника.

Все биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке – *центре вписанной* в треугольник *окружности*.

Биссектриса делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные принадлежащим сторонам треугольника.



$$\frac{CA_1}{A_1B} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow CA_1 = \frac{ab}{b+c};$$

$$A_1B = \frac{ac}{b+c}; \quad \frac{AO}{OA_1} = \frac{b+c}{a}$$

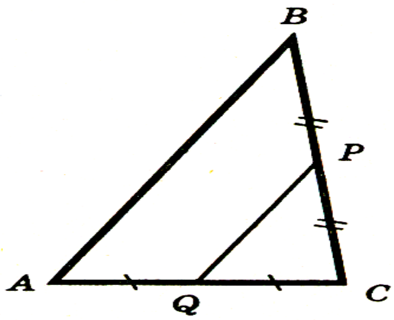
$$AA_1^2 = AB \cdot AC - A_1B \cdot A_1C$$

$$AA_1 = \frac{2 \cdot AB \cdot AC}{AB + AC} \cos \frac{A}{2}$$

Средняя линия

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника.

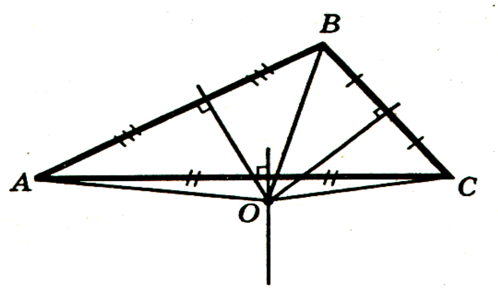
Средняя линия *параллельна третьей* стороне и равна ее *половине*.



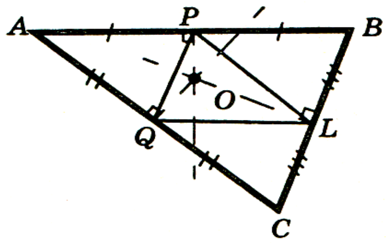
$$PQ \parallel AB$$

$$PQ = \frac{1}{2} AB$$

Тема 7 Серединный перпендикуляр



$AO = BO = CO = R$



Серединным перпендикуляром называется прямая, перпендикулярная стороне треугольника и делящая ее пополам.

Все серединные перпендикуляры треугольника пересекаются в одной точке – *центре описанной* около треугольника *окружности*. Около каждого треугольника можно описать окружности и притом только одну.

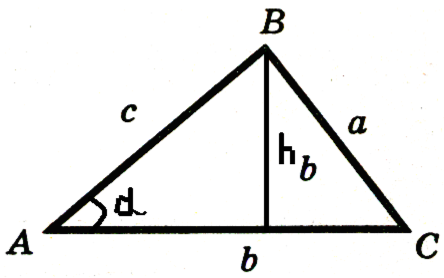
Точка пересечения серединных перпендикуляров треугольника является точкой пересечения высот треугольника, образованного средними линиями данного.

Тема 8   Площадь треугольника

$$S_\Delta = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$

$$S_\Delta = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}bc\sin A$$

$S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (формула Герона)



$$S_\Delta = rp$$

$$S_\Delta = \frac{abc}{4R}$$

$p = \frac{1}{2}(a+b+c)$- полупериметр

r -радиус вписанной окружности

R -радиус описанной окружности

Теорема косинусов

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

Теорема синусов

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих им углов.

Тема 9 Вписанная окружность

В каждый треугольник можно *вписать* окружность и только *одну*.

Её центр – *точка пересечения биссектрис*.

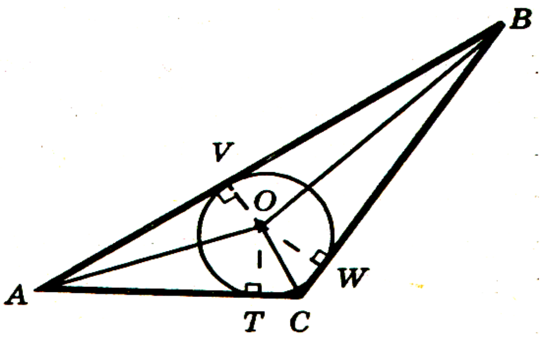
Радиус (r) вычисляется по формулам:

$$r = \frac{S}{P}$$

$$r = (p-a)\cdot tg\frac{A}{2} = (p-b)\cdot tg\frac{B}{2} = (p-c)\cdot tg\frac{C}{2}$$

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} = \frac{S}{p}$$

p - полупериметр



$OT \perp AC$; $OV \perp AB$, $OW \perp BC$

$AV = AT = p - a$

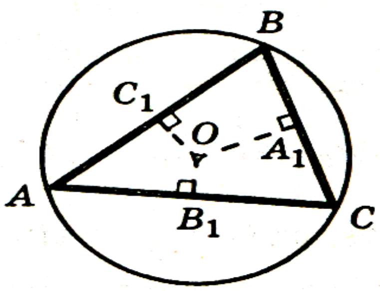
$BV = BW = p - b$

$CW = CT = p - c$

Описанная окружность

Около каждого треугольника можно *описать* окружность и притом только *одну*.

Её центр – *точка пересечения серединных перпендикуляров* к сторонам треугольника.



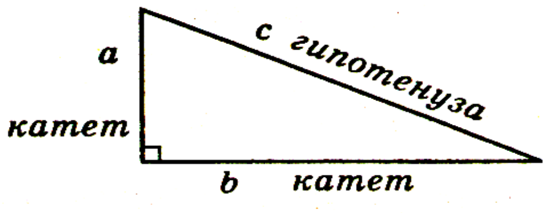
Радиус (R) вычисляется по формулам:

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C}$$

$$R = \frac{abc}{4S}$$

Тема 10 Прямоугольный треугольник

Сторона прямоугольного треугольника, противолежащая прямому углу, называется *гипотенузой*, две другие стороны называются *катетами*.

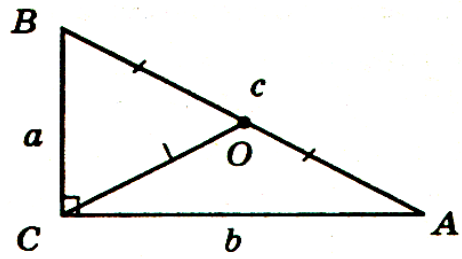


Теорема Пифагора

Квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов.

$c^2 = a^2 + b^2$

Свойства прямоугольного треугольника



$$OA = OB = OC = R = \frac{1}{2}c$$

Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна *половине гипотенузы*.

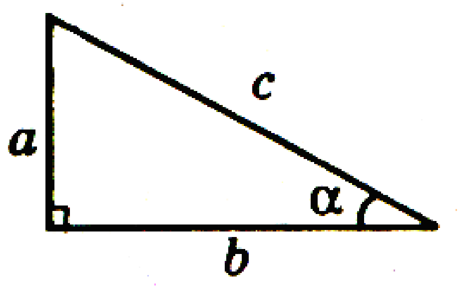
Только в прямоугольном треугольнике *центр описанной окружности* лежит на стороне треугольника (совпадает с *серединой гипотенузы*).

Площадь прямоугольного треугольника

$S = \frac{1}{2}ab$;

$S = \frac{1}{2}ch$, h - высота, проведенная к гипотенузе.

Тема 11 Тригонометрические функции острых углов прямоугольного треугольника



Синусом острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение *противолежащего катета к гипотенузе*.

$$\sin\alpha = \frac{a}{c};$$

Косинусом острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение *прилежащего катета к гипотенузе*.

$$\cos\alpha = \frac{b}{c};$$

Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение *противолежащего катета к прилежащему*.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

Котангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение *прилежащего катета к противолежащему*.

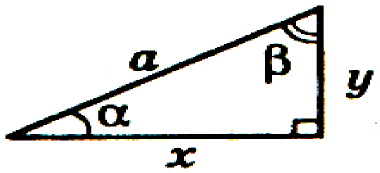
Признаки прямоугольных треугольников

Если квадрат одной из сторон треугольника равен сумме квадратов других сторон, то такой треугольник прямоугольный.

Если медиана треугольника равна половине соответствующей ей стороны, то треугольник прямоугольный.

Тема 12 Решение прямоугольных треугольников

Дано: гипотенуза и острый угол.

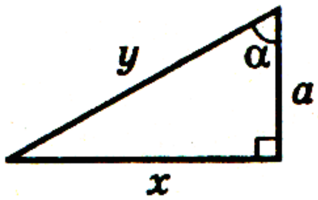


$$x = a \cdot \cos\alpha$$

$$y = a \cdot \sin\alpha$$

$$\beta = 90^0 - \alpha$$

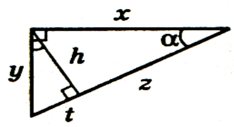
Дано: катет и острый угол.



$$x = a \cdot tg\alpha$$

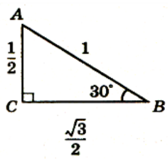
$$y = \frac{a}{\cos\alpha}$$

Дано: высота, опушенная на гипотенузу, и острый угол.



$$y = \frac{h}{\cos\alpha}$$

$$x = \frac{h}{\sin\alpha}$$

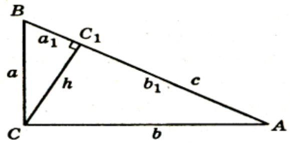


$$z = h \cdot ctg\alpha$$

$$t = h \cdot tg\alpha$$

Катет, лежащий против угла 30^0, равен половине гипотенузы.

Соотношения в прямоугольном треугольнике



$$BC^2 = BC_1 \cdot AB; \qquad a^2 = a_1 \cdot c$$

$$AC^2 = AC_1 \cdot AB; \qquad b^2 = b_1 \cdot c$$

$$CC_1^2 = BC_1 \cdot C_1A; \qquad h^2 = a_1 \cdot b_1$$

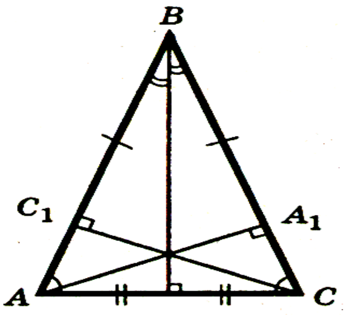
$$h = \frac{ab}{c}$$

Тема 13 Равнобедренный треугольник

Равнобедренным треугольником называется треугольник с двумя равными сторонами.

Общая вершина равных (*боковых*) сторон называется *вершиной равнобедренного треугольника*, а третья сторона *основанием*.

Свойства равнобедренного треугольника



$AA_1 \perp BC$
$CC_1 \perp AB$ $\Leftrightarrow AA_1 = CC_1$

Углы при основании равны.

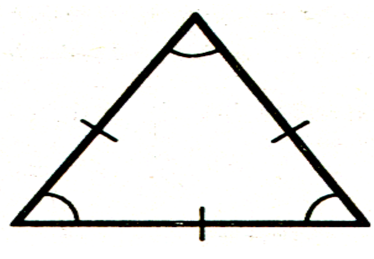
Высота, проведенная из вершины равнобедренного треугольника, является медианой и биссектрисой (осью симметрии).

Высоты (биссектрисы, медианы), проведенные к боковым сторонам равны.

Все эти свойства равнобедренного треугольника обратимы и могут быть использованы для получения *признаков равнобедренного треугольника.*

Правильный треугольник

Правильным (*равносторонним*) называется треугольник, все стороны которого равны.



Свойства правильного треугольника

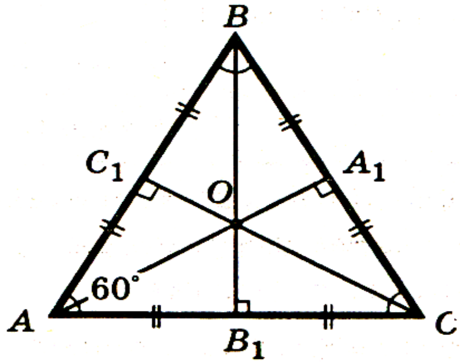
Все углы равностороннего треугольника равны 60^0.

Только в правильном треугольнике совпадают точки пересечения медиан, биссектрис, высот, серединных перпендикуляров. Эта точка называется *центром правильного треугольника* и является центром вписанной и описанной окружности.

Центр правильного треугольника и его высота в отношении 2:1, считая от вершины.

Только в правильном треугольнике

$$R = 2r = \frac{2}{3}h = \frac{a}{\sqrt{3}}$$



$$AB = BC = AC = a$$

$$AA_1 = BB_1 = CC_1 = h$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Площадь правильного треугольника

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$